UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL VENADO TUERTO
2002.

Sobre, MEDICIONES FÍSICAS.

Por: Leandro Prevosto, Beatriz Mancinelli.[1]

[1] Basado fuertemente en:
MEDICIONES FÍSICAS, Prof. Dr. Jose A. Balseiro,1954.

MEDICIONES FÍSICAS

Significado de la medición de una magnitud.

Medir una magnitud física es asociar a la misma un valor dimensionado en relación a la unidad que arbitrariamente se ha definido para medirla. Así medir una distancia, significa establecer el número de veces que la unidad de longitud está contenida en dicha distancia.

La operación de medir una magnitud supone a priori que tal magnitud tiene un valor verdadero, no obstante las dificultades lógicas que aparecen en cuanto se trata de precisar con rigor el significado de este concepto. No existen ni pueden existir instrumentos que permitan medir sin error alguno una magnitud física. Podemos medir p.e. la carga del electrón con una aproximación tanto más grande cuanto mejor sea el método que imaginamos para hacerlo; pero en ningún caso podemos medir la "verdadera" carga del electrón. Además, en muchos casos, en cuanto extremamos la aproximación con que medimos una magnitud la propia magnitud carece de sentido. Así, si medimos la longitud de una barra rígida con una escala métrica, con una escala con vernier, con métodos ópticos, etc. obtenemos valores de esa longitud que decimos son más aproximados; pero, qué sentido tiene medir esa longitud con una aproximación del orden o mayor que la distancia (10^{-7} *cm*) que separa a los átomos que forman la barra rígida?

Solamente como una excepción muy particular, cuando el número que mide una magnitud es necesariamente un número entero se puede afirmar que es rigurosamente exacto. P.e. el número de electrones en un átomo.

Con las restricciones que el caso exige necesitamos del concepto de valor verdadero de una magnitud, al menos como hipótesis de trabajo. Más adelante, al tratar los errores estadísticos podremos precisar más este concepto. Lo que importa, ahora, es destacar que la medida de una magnitud difiere siempre en algo del verdadero valor de la misma. Dar simplemente un número como medida de una magnitud sin precisar el error de que está afectado, sea aproximadamente, sea en términos de probabilidades no significa mucho. Una medida tiene sentido sólo cuando se puede valorar de una u otra forma el error de que está afectada.

Errores. Error relativo. Precisión de una observación.

Se llama error de la observación X' respecto de cierto valor X a:

$$\Delta X = X - X'$$

Según el significado de X (valor verdadero, valor medio o valor más probable) es la denominación que se la da al error ΔX . Por ahora, supondremos que X es el valor verdadero; en tal caso ΔX es el error absoluto o error verdadero.

Para intentar averiguar el valor verdadero de una magnitud se procede, como luego se verá, a realizar una colección de medidas experimentales de *n* observaciones, que proporcionan a posteriori un valor óptimo aproximado, p.e. la media aritmética de tales medidas, y una cota de error absoluto ΔX .Suele presentarse, en esas circunstancias, como resultado experimental:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X, \text{ con } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde X_i es la observación *i-ésima* de la magnitud *X*.

Lo que quiere significar que la magnitud medida se encuentra dentro del intervalo

$$[\, \overline{X} - \Delta X,\ \overline{X} + \Delta X \,],$$

con una determinada probabilidad. Por definición ΔX es siempre positivo.

El sólo enunciado del error de una observación no es suficiente para caracterizar la aproximación o precisión de la misma. Sea p.e. la medida de una distancia de *1 m* con una regla que produce un error de *2 mm*. El error por unidad de escala (el *mm*) es:

$$\frac{2}{1000} = 0.002$$

Si medimos en cambio el diámetro de un alambre de *1 mm* con un tornillo micrométrico que nos da un error de *0.01* mm el error por unidad de escala es de *0.01*. En el primer caso tenemos por unidad de escala un error cinco veces menor que en el segundo. El error por cada unidad en las cuales se mide la magnitud a determinar se llama error relativo:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{|X|}$$

Para los fines prácticos sólo se requiere valores aproximados del error relativo, de modo que,

$$\frac{\Delta X}{|X|} = \frac{\Delta X}{|X' + \Delta X|} \cong \frac{\Delta X}{|X'|}$$

define el error relativo de la observación *X*', y es calculable siempre que se pueda valorar ΔX **.**
A veces el error relativo no se da por cada unidad sino por cada *100* unidades. En tal caso se define el error relativo porcentual:

$$\delta X\% = \frac{\Delta X}{|X|} 100 \cong \frac{\Delta X}{|X'|} 100$$

Cuando se dice que el error relativo es del *2*% significa que se comete un error de dos unidades por cada *100* de las mismas. El valor inverso del error relativo mide la precisión de la correspondiente medición. De esta forma definimos precisión de un medición: El número de unidades afectadas de un error equivalente a una de dichas unidades.

$$K = \frac{|X|}{\Delta X} \cong \frac{|X'|}{\Delta X}$$

Precisión de un método o de un instrumento de medición.
La mayor o menor precisión de un instrumento de medida o método de medición, está definida por la facultad de uno u otro de repetir con mayor o menor precisión los resultados de las mediciones de una misma magnitud, supuestas éstas realizadas en idénticas condiciones.
Entre la sensibilidad de un instrumento de medición y su precisión, no existe un relación directa. Esto es, p.e. en una balanza de platillos la sensibilidad está dada por la coincidencia del centro de gravedad de la cruz, y del soporte de ésta; en el límite cuando ambos coinciden exactamente, el sistema móvil se encuentra en equilibrio indiferente y por lo tanto cualquier sobrecarga sobre uno de los platillos, por pequeño que sea causa una gran desviación del fiel, la sensibilidad de la balanza es, en consecuencia, muy grande. Sobre la precisión en ese extremo, es claro, que es muy pequeña, puesto que la posición de equilibrio del fiel es prácticamente invariante respecto de su desviación. Luego es necesario lograr un compromiso, y operar con sensibilidades tales que la precisión de la balanza sea la adecuada.

Precisión y cifras significativas de una observación.
Según vayan mejorando la calidad de los instrumentos de medición y la sofisticación de los métodos; pueden llevarse a cabo experimentos a niveles de precisión siempre más elevados, esto es, podremos extender los resultados medidos a más cifras significativas; y correspondientemente reducir la incertidumbre experimental de la observación. Tanto el número de cifras significativas como la incertidumbre dicen algo acerca de la estimación de la precisión de la medición. Es decir, la medición *X' = 3*, indica que existe razonable certeza que *X'* se encuentra entre *2* y *4*. Mientras que la medición *X' = 3.14159*, indica que probablemente *X'* se halle entre *3.14158* y *3.1416*. Si se expresa a *X'* como *3* cuando se cree que probablemente el valor sea de *3.14159*, se está despreciando información que puede ser importante. Por otra parte si se expresa *X' = 3.14159* cuando realmente no se cuenta con base para sustentar nada más que *X' = 3*, se está mintiendo al afirmar que se tiene más información que la que se puede asegurar.
Existen algunas reglas sencillas a seguir para decidir cuantas cifras significativas se deben incluir:

Regla 1.
Contar desde la izquierda sin tomar en cuenta los primeros ceros, conservar todos las cifras hasta el primer número dudoso. Es decir, *X' = 5 m* tiene sólo una cifra significativa y expresarlo como *X' = 0.005 Km* no cambia las cosas. Si en su lugar escribimos *X' = 5.0 m*, o su equivalente *X' = 0.0050 Km*, indica que se conoce la medición *X'* hasta con dos cifras significativas.
Requiere atención las notaciones ambiguas: *X' = 400 m*, no indica si existe una, dos o tres cifras significativas; no se sabe si los ceros conllevan información o si simplemente ocupan lugar. Es conveniente expresar:
$X' = 4\ 10^2$ o $4.0\ 10^2$ o $4.00\ 10^2\ m$, para precisar la medición con claridad.

Regla 2.
Cuando se multiplica o se divide, es conveniente conservar un número de cifras significativas en el producto o en el cociente no mayor al número de cifras significativas en el menos preciso de los factores. Es decir**,** $2.3 \times 3.14159 = 7.2$.

Regla 3.
Al sumar o al restar, el dígito menos significativo de la suma o de la diferencia ocupa la misma posición relativa que el dígito menos significativo de las cantidades que son sumadas o restadas.
Esto es, lo importante aquí es la posición y no el número de cifras significativas. P.e. sea que se quiere hallar la masa total de tres cuerpos como sigue:

$$\begin{array}{r} 103.9 \\ 2.10 \\ \underline{0.319} \\ 106.319 \text{ o } 106.3\ kg \end{array}$$

Aproximación de la última cifra significativa.
En todos los casos se debe aproximar por exceso o por defecto la última cifra significativa del valor final de cálculo, es decir, la primer cifra dudosa. Se puede adoptar que si la cifra inmediata siguiente es menor que *5* se omite sin más; y si es mayor, la última cifra significativa adopta el valor inmediato superior. Sin embargo en el proceso de los cálculos numéricos intermedios es conveniente tomar una o a lo sumo dos cifras más que el primer dígito dudoso.
P.e. la medición de una temperatura se da como,

$$T = 301.267 \pm 0.3 \text{ K.}$$

Lo cual es incorrecto, puesto que las dos últimas cifras, (*67*) no tienen significado alguno, al ocupar un lugar menor que el error, y sólo surgen de los cálculos numéricos. La forma de expresar la medición podría ser,

$$T = 301.2 \pm 0.3 \text{ K}$$

aunque la forma correcta es,

$$T = 301.3 \pm 0.3 \text{ K}$$

puesto que *301.267* es más próximo a *301.3* que a *301.2*.

Cifras significativas del error.
Hay que tener siempre presente que todo error es una estimación y está por tanto sujeto a su vez a una incertidumbre, generalmente grande. Por esto no tiene sentido especificarlo con más de una única cifra significativa, y además puesto que lo que se intenta es dar la cota máxima del error, es conveniente en consecuencia, aproximar siempre en exceso. Salvo escasas excepciones, se expresa con un una sola cifra significativa.

Clasificación de los errores.
Según el origen de los errores distinguiremos entre:

1. **Errores Sistemáticos**.
   Son los errores provenientes de una imperfección o ajuste inadecuado del instrumento de medida, de la aplicación de un método erróneo, de la acción permanente de una causa exterior, etc. Así, p.e. la desigual longitud de los brazos de un balanza; una posición inadecuada del observador que introduce un error de paralaje; la medida de la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia con un voltímetro cuya resistencia interior es comparable con la primera; la acción del campo magnético terrestre sobre instrumentos con campos magnéticos, el desplazamiento del cero de la escala, producen errores sistemáticos. Estos errores son siempre prácticamente iguales y del mismo signo. Sobre esta clase de errores no puede hacerse ninguna teoría general. En casos particulares, sin embargo, existen métodos para ponerlos de manifiesto y, en otros, es posible aplicar a las mediciones las correcciones que los eliminan.

2. Errores de Apreciación.
Las determinaciones experimentales se reducen, en última instancia, salvo excepciones, a la lectura mediante un índice de una escala graduada. Al efectuar la lectura, el observador se ve precisado de apreciar una fracción de la división mínima de la escala. En esta apreciación va implícito cierto error que, por su naturaleza, llamaremos error de apreciación. La experiencia del observador le permite conocer según el instrumento, de que orden de magnitud es el error de apreciación que comete.

3. Errores Casuales.
Si una misma magnitud se mide cierto número de veces con el mismo instrumento, y en las mismas condiciones los valores no son idénticos y difieren entre sí en pequeñas cantidades. Naturalmente que estas diferencias provienen en parte de los errores de apreciación. Pero son atribuibles, también, a una cantidad de otros factores no previsibles, como pequeñas variaciones de las condiciones ambiente (temperatura, presión, movimiento de los soportes) otros provenientes del observador (variación de la atención, fatiga de la vista, errores de paralaje) y finalmente otros que se deben al mismo instrumento (tensiones accidentales en los soportes de los órganos, movimiento browniano, etc.). Los errores casuales obedecen a leyes de carácter estadístico y a ellos se refiere la teoría estadística de errores.

Errores sistemáticos.
Eliminación de ciertos tipos de errores sistemáticos.
Clasificaremos a los errores sistemáticos con vistas a su estudio y a su posible eliminación en:

a) Errores producidos por la defectuosa construcción o defecto permanente de la escala de medida de un instrumento. P.e. debido al uso, frecuentemente en los tornillos micrométricos el cero está desplazado. Si el desplazamiento es hacia los valores negativos de la escala se producirán errores por defecto, y por exceso si es hacia los valores positivos. El error mencionado es posible de eliminar ajustando previamente el cero en el micrómetro, o, si d es este desplazamiento y L_0 una determinación, el valor corregido es, $L = L_0 + d$; con d negativo si el cero está desplazado hacia los valores positivos de la escala; y positivo si se encuentra desplazado hacia los valores negativos.

b) Errores provenientes de un desperfecto, de la deficiente construcción o funcionamiento de un instrumento; tales como los errores que produce una balanza de brazos desiguales o los de un cronómetro que adelanta o atrasa. Este tipo de error sistemático son los más difíciles de corregir y ningún instrumento prácticamente está desprovisto de ellos: Sólo en los buenos instrumentos son sensiblemente menores que los errores de apreciación o casuales.
Los casos en los cuales es posible eliminar, a veces, estos errores sistemáticos son aquellos en que las condiciones de medida implican cierta clase de simetría. En general, cuando ello es posible, el valor medio de dos determinaciones realizadas utilizando las condiciones de simetría permiten eliminar esta clase de errores.
P.e. uno de los errores sistemáticos más frecuentes en las pesadas de precisión es el producido por una desigual longitud de los brazos de la cruz de la balanza. El método de la doble pesada de GAUSS, permite eliminar este error. En efecto: Sea P el peso del cuerpo en el platillo correspondiente al brazo de longitud l_1, y $P+\varepsilon$ en el otro correspondiente al brazo de longitud l_2.
En el estado de equilibrio de cumple:
$P\,l_1 = P_0\,l_2$; $P_0\,l_1 = (P+\varepsilon)\,l_2$. Siendo P_0 el valor exacto del peso. Eliminando l_1 y l_2, se obtiene:
$$P_0 = \sqrt{P(P+\varepsilon)}$$
El valor exacto del peso del peso del cuerpo es el promedio geométrico de las dos pesadas. Si la diferencia ε entre ambas es pequeña como casi siempre acontece aquel valor puede aproximarse por el promedio aritmético:
$P_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left[P^2 + (P+\varepsilon)^2\right]} \cong \sqrt{P(P+\varepsilon)}$, despreciando ε^2, infinitésimo de segundo orden, frente a los demás términos de la suma.
Luego se sigue,

$$P_0 \cong \frac{1}{2}\left[P + (P+\varepsilon)\right] = P + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

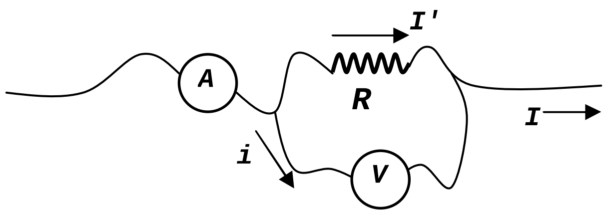
La aproximación dada puede obtenerse evaluando el incremento de la función $\sqrt{P(P+\varepsilon)}$**,** en torno al valor $\varepsilon = 0$. En efecto: $f_{(x+\Delta x)} \cong f_{(x)} + f'_{(x)}(\Delta x)$**,** (que es la serie de TAYLOR truncada a los dos primeros términos) nos da aproximadamente el valor de una función $f_{(x)}$ en un punto $f_{(x+\Delta x)}$, si conocemos el valor de la función y de su derivada en el punto ***x*****.** Haciendo $f_{(\varepsilon)} = \sqrt{P(P+\varepsilon)}$**,** y evaluando a la función en el entorno de $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$, se sigue,

$$\sqrt{P(P+\varepsilon)} \cong f_{(0)} + f'_{(0)}\,\varepsilon = P + \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Errores sistemáticos inherentes al método de medida. En general no se puede dar un método para eliminar esta clase de errores y sólo un discusión minuciosa en cada caso particular permitirá establecer, cuando ello es posible, la corrección aplicable a la medida. P.e. sea que se requiera medir el valor de una resistencia óhmica con amperímetro y voltímetro utilizando el circuito conexión corta. El amperímetro *A* mide la intensidad de la corriente eléctrica *I*, y el voltímetro *V* la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia *R*. El valor de esta última queda dado por la ley de OHM:

$$R = \frac{V}{I}\,.$$

Esto es totalmente correcto si en vez de un voltímetro se empleara un medidor electrostático de potencial (electrómetro), pero dado el hecho de que el voltímetro consume energía eléctrica del circuito, rigurosamente la corriente que mide el amperímetro vale, $I = I' + i$, donde i es la intensidad de la corriente eléctrica que circula por el voltímetro, y I' la intensidad de corriente eléctrica que circula por la resistencia.



$$R = \frac{V}{I-i} > \frac{V}{I} = R'$$

Donde R' es el valor de la resistencia sin corregir.
El error sistemático cometido al utilizar el método de medición conexión corta es,

$$\frac{V}{I-i} - \frac{V}{I}\,.$$

Siendo posible eliminar el error si se conoce el valor de la resistencia interna del voltímetro r, dado que,

$$i = \frac{V}{r}\,.$$

d) Por último, debemos señalar los errores sistemáticos producidos por las condiciones donde se realiza el ensayo. P.e. la pesada de un cuerpo cuya densidad es distinta a las de las pesas está afectada siempre por el empuje que recibe del aire, etc.

Errores de apreciación.
Mediciones directas e indirectas.
Llamaremos <u>medición directa</u> a la operación de lectura en un instrumento aplicado a medir cierta magnitud. P.e. la determinación de una distancia con una escala métrica.
Una <u>medición indirecta</u> es la que resulta de una ley física que vincula la magnitud a medir con otras magnitudes medibles directamente. Así, la aceleración de la gravedad determinada por un péndulo ideal,

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} l$$

relaciona la magnitud g a medir con l la longitud del péndulo, medible directamente con una regla, y con τ el período de una oscilación medible en forma directa con un cronómetro.

Errores de apreciación de las mediciones directas.

Los errores de apreciación en la lectura sobre la escala de un instrumento depende del tipo de dispositivo de lectura y de la habilidad del observador para realizarla. Su valoración no puede hacerse sino en forma aproximada dependiendo esta valoración tanto de la habilidad del observador para efectuar la lectura como de su experiencia para asignarle determinado valor. <u>El signo del error de apreciación es tanto positivo como negativo y su valor máximo es prácticamente constante para un mismo observador operando en iguales condiciones</u>.

Cuando se mide una distancia con una escala graduada en milímetros un observador no experimentado podrá observar fracciones de *0.5* a *0.3 mm* mientras que un observador hábil puede garantizar la fracción *0.2 mm*. Los errores de apreciación serán, pues, de *0.5*; *0.3* o *0.2 mm*. En el caso de una escala provista de nonius de la relación *9/10* podrá no poderse apreciar la coincidencia de una división del nonius con una división de la escala sino con una indeterminación de una división del nonius; en tal caso el error es de *0.1* de división.

Otro caso, es la medición de intervalos de tiempo con cronómetros. Suponiendo un cronómetro digital, el tiempo de reacción de la persona de unos *1/5 seg* es notablemente superior al tiempo entre pulso y pulso del cronómetro. Por lo tanto aquí la apreciación de la medición viene determinada por la habilidad del operador. Puede no ocurrir lo mismo con un cronómetro de agujas, puesto que en éste las agujas no se mueven de modo uniforme, sino que lo hacen a saltos a intervalos de *1/5* a *1/10 seg*, el mecanismo del cronómetro actúa como fuente de error. P.e. si tratamos de medir el período de oscilación de un péndulo del orden de magnitud de *1 seg*, un error de *1/5 seg* es considerablemente grande y, en general invalidará la medida. Sin embargo en el caso de mediciones de períodos este error puede atenuarse considerablemente con sólo medir lapsos correspondiente grande de períodos. En efecto: Sea t el tiempo de n periodos de duración τ:

$$t = n\tau$$

El error de apreciación de la medición de t sea Δt. Se tiene:

$$\Delta t = n\Delta\tau = \frac{1}{5} seg \quad , \quad \Delta\tau = \frac{1}{5n} seg$$

El error $\Delta\tau$ disminuye en forma inversamente proporcional al número de períodos que se tiene en cuenta. Recíprocamente si fijamos el error podemos calcular el número de períodos que es necesario tener en cuenta para no cometer errores superiores al tolerable.

Errores de apreciación en las mediciones indirectas.

Sea una magnitud L que nos interesa medir, una función conocida de otra magnitud X que medimos directamente:

$$L = f_{(X)}$$

Se plantea el problema de determinar en cuanto afecta a L el error de apreciación cometido al medir X. De la medición de X obtendremos un valor $X = X' \pm \Delta X$, siendo ΔX el error de apreciación. Al calcular L con el valor X obtendremos cierto,

$$L = L' \pm \Delta L = f_{(X \pm \Delta X)}$$

donde ΔL es el error de apreciación de L.

Calculando la diferencial de la función $L = f_{(X)}$,se sigue,

$$f_{(X \pm \Delta X)} - f_{(X)} \cong \pm f'_{(X)} \Delta X \quad , \quad f_{(X \pm \Delta X)} \cong f_{(X)} \pm f'_{(X)} \Delta X$$

que coincide con el desarrollo en serie de TAYLOR donde se desprecian los términos de potencia superiores a la unidad, de ΔX.

$$L = L' \pm \Delta L = f_{(X \pm \Delta X)} \cong f_{(X)} \pm f'_{(X)} \Delta X \quad , \Delta L \cong f'_{(X)} \Delta X$$

Puesto que en general no conocemos el valor verdadero X, para el cálculo de ΔL podemos aproximar el valor de,

$$f'_{(X)} \cong f'_{(X')} ,$$

de modo que:

$$\Delta L \cong f'_{(X')}\Delta X \text{ .}$$

Cuando se trata de una magnitud L a medir expresada como función de más de una magnitud medible directamente:

$$L = f_{(X,Y,Z)} \text{.}$$

El significado del error de apreciación de L es el mismo, a saber: Las medidas de X,Y,Z están afectadas de ciertos errores de apreciación ΔX, ΔY, ΔZ, respectivamente, de modo que los valores,
$X = X' \pm \Delta X$, $Y = Y' \pm \Delta Y$, $Z = Z' \pm \Delta Z$,
permiten calcular el valor $L = L' \pm \Delta L$, siendo ΔL el error de apreciación de L. Para calcular este valor se procede en forma idéntica que en el caso de una sola variable, se calcula la diferencial de la función, que coincide con el desarrollo de la serie de TAYLOR de una función de varias variables despreciando los términos de orden superior:

$$L = f_{(X,Y,Z)} = f_{(X+\Delta X, Y+\Delta Y, Z+\Delta Z)} = f_{(X',Y',Z')} \pm \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X \pm \frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y \pm \frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z$$

$$L - f_{(X,Y,Z)} = \Delta L = \pm \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X \pm \frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y \pm \frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z$$

La mayor o menor contribución de los errores de X,Y,Z depende del mayor o menor valor de los coeficientes,

$$\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z} \text{,}$$

razón por la cual estos coeficientes se denominan <u>factores de propagación de los errores</u> ΔX,ΔY,ΔZ, respectivamente. El signo de estos errores, como el de los factores de propagación pueden ser tanto positivos como negativos. El máximo error de L se producirá cuando todos los términos que definen a ΔL tienen el mismo signo. <u>Por definición</u> este valor máximo de ΔL es el error de apreciación de L. Es decir:

$$\Delta L = \pm\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial X}\Delta X\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z\right|\right\}.$$

El error relativo de ***L***, está dado en función de los errores de ***X***,***Y***,***Z*** por:

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm\left\{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{X}{L}\right)\frac{\Delta X}{X}\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{Y}{L}\right)\frac{\Delta Y}{Y}\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{Z}{L}\right)\frac{\Delta Z}{Z}\right|\right\}.$$

En este caso los factores de propagación de los errores relativos son:

$$\frac{\partial f}{\partial X}\frac{X}{L}, \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{Y}{L}, \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{Z}{L} \text{.}$$

Cuando todos los términos de la última expresión son del mismo orden los errores de las mediciones de X,Y,Z, contribuyen en proporciones más o menos equivalentes al error de L. Sin embargo acontece con frecuencia que algunos de los coeficientes de propagación de los errores relativos son considerablemente menores que otros. En tal caso el error de L proviene casi exclusivamente de los términos mayores. Poner de manifiesto este hecho es de considerable importancia práctica, pues nos da la pauta de cuales son las mediciones que debemos efectuar con mayor precisión eligiendo convenientemente el método y el instrumental de medida.

Es posible demostrar que el error relativo máximo de una función es igual al error absoluto máximo del logaritmo de esta función. En efecto, de la fórmula del error relativo máximo, se sigue:

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm\left\{\left|\frac{\frac{\partial L}{\partial X}}{L}\Delta X\right| + \left|\frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{L}\Delta Y\right| + \left|\frac{\frac{\partial L}{\partial Z}}{L}\Delta Z\right|\right\},$$

pero,

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial X}}{L} = \frac{\partial\, ln|L|}{\partial X}, \frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{L} = \frac{\partial\, ln|L|}{\partial Y}, \frac{\frac{\partial L}{\partial Z}}{L} = \frac{\partial\, ln|L|}{\partial Z} \text{.}$$

Por consiguiente se puede escribir:

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm\left\{\left|\frac{\partial\, ln|L|}{\partial X}\Delta X\right| + \left|\frac{\partial\, ln|L|}{\partial Y}\Delta Y\right| + \left|\frac{\partial\, ln|L|}{\partial Z}\Delta Z\right|\right\}.$$

Sea p.e. que se quiera determinar el error relativo de la determinación del periodo τ de un péndulo matemático por la fórmula:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Tomando el logaritmo de NEPER del periodo, por propiedad de logaritmos se sigue,

$$ln|\tau| = ln|2| + ln|\pi| + \frac{1}{2}ln|l| - \frac{1}{2}ln|g|\ .$$

La expresión del error relativo del periodo es,

$$\delta\tau = \pm\left\{\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|\right\},$$

y poniendo,

$$\pi = 3.14 \pm 0.005\ ,\ l = 1.00 \pm 0.01m\ ,\ g = 9.80 \pm 0.02\frac{m}{seg^2}\ ,$$

se completa el cálculo:

$$\delta\tau = \pm\left\{\left|\frac{0.005}{3.14}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{0.01}{1.00}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{0.02}{9.8}\right|\right\} \cong 0.0076 \Rightarrow 0.8\%\ .$$

Cálculo del error máximo de una determinación.

En general, al realizar una medida si se trata de obtener el mejor valor posible no es suficiente una sola observación. Sin embargo, con frecuencia no se necesita obtener el valor más preciso posible y en tal caso será suficiente una sola observación. Pero como ya hemos visto que un número como medida de una magnitud no significa mucho, sino se especifica cual es el error, al menos aproximado de que está afectada. Supuesto que el instrumento o el método de medida no estén afectados de errores sistemáticos, con una sola observación sólo podremos especificar cual es el error máximo de nuestra medida debido a los errores de apreciación que se cometen.

Elección del instrumental de medición.

Es importante para no desperdiciar esfuerzos en extremar la precisión en mediciones que no lo requieran, y sí esmerarse en aquellas donde sea necesario, el conocer como influyen los errores cometidos en particular sobre la medición indirecta final. El problema pues, consiste en la determinación de los factores de propagación de error en las distintas mediciones directas intervinientes, para utilizarlo como criterio de decisión.

Sea, p.e. que se requiera determinar el valor local de la gravedad utilizando un péndulo ideal, con un error no mayor que el *0.5*%. La fórmula de g es,

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2}l\ .$$

Siendo l la longitud del péndulo, y τ el periodo de una oscilación. Sean éstas, $l = 1200\ mm$, $\tau = 2.2\ seg$.

El error $\delta g\%$ se determina como,

$$\delta g\% = \pm\left\{2\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 2\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|\right\}100$$

midiendo la longitud del péndulo con una regla milimetrada podremos apreciar en el peor de los casos *0.5 mm;* por lo tanto el error vale,

$$\left|\frac{\Delta l}{l}\right| \cong \frac{0.5}{1200} = 0.0004 = 0.04\,\%.$$

Vemos que la determinación de la longitud no constituye una fuente sustancial de error.

El error que produce el valor adoptado de π,

$\pi = 3.140 \pm 0.005$ es,

$$2\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| \cong \; 2\frac{0.005}{3.14} = 0.003 = 0.3\% \; .$$

El error cometido al medir el tiempo, suponiendo una apreciación de *1/5 seg*, es,

$$2\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right| \cong \frac{0.2}{2.2} = 0.18 \Rightarrow 20\% \; ,$$

completamente inadmisible.

Luego debemos medir un número convenientemente elevado de periodos de modo de poder reducir el error de apreciación de la medición.

Determinemos previamente el error máximo permisible de cometer, (*0.5* - *0.3* - *0.04*)% = *0.16*%. Luego es inmediato que el número mínimo de períodos *n* a medir es,

$$n = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{0.2}{0.0016} = 125 \; .$$

Claramente se aprecia que esmerarse en medir con mayor precisión la longitud del péndulo que la que puede obtenerse de una regla milimetrada carece de fundamento, dado el hecho que la fuente fundamental de error es la medición del periodo, donde si es necesario extremar los recaudos; además medir un número suficientemente grande de periodos no crea inconvenientes, puesto que el período de un péndulo ideal es independiente de la amplitud de la oscilación, y en un péndulo físico, para oscilaciones pequeñas también. Luego veremos que se entiende por oscilaciones pequeñas.

Errores casuales.

Teoría estadística de errores.

Hasta ahora hemos considerado como se puede valorar aproximadamente el error de una medición directa o indirecta de una sola observación y cuando los errores sistemáticos y casuales eran despreciables frente a los de apreciación. Sin embargo, aún suponiendo que los errores sistemáticos son nulos o despreciables una medición está afectada siempre de errores casuales cuyo origen ya hemos enunciado. Debido a esta circunstancia, cuando se trata de hacer medidas de precisión y asignarle a esta medida un error lo más pequeño y aproximado posible es indispensable recurrir a la repetición de la misma un número convenientemente grande de veces. En esta forma los errores casuales aparecen distribuidos al azar y es posible hacer una teoría estadística de estos errores.

Observemos que, de este punto de vista los errores de apreciación también están incluidos dentro de los errores casuales, y una repetición de las observaciones implicará una repartición estadística de estos errores, lo que en definitiva tiende, como veremos, a una disminución del error a medida que aumenta el número de observaciones.

Definiciones:

Sea X el valor verdadero de una magnitud, y X_1, X_2, X_3,..., X_n; n observaciones de esta magnitud.

Se llama error absoluto o verdadero de la observación X_i, al valor:

$$\xi_i = X - X_i.$$

Valor medio o promedio de las n observaciones:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; .$$

Error aparente de la observación X_i:

$$x_i = \overline{X} - X_i.$$

Error absoluto del valor medio:

$$E = X - \overline{X} \; .$$

Error medio cuadrático:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - X_i\right)^2} \; .$$

De las anteriores definiciones se obtienen las siguientes consecuencias:

1. Sumando los valores de los errores aparentes, se tiene,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \,,$$

puesto que por definición es,

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, de lo cual y por definición la suma de los errores aparentes es nula.

2. Calculando el valor medio de los errores absolutos,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X - X_i = X - \overline{X} = E \,,$$

el error absoluto del valor medio, es en consecuencia, el valor medio de los errores absolutos.

3. Desarrollando la suma de los cuadrados de los errores aparentes,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{X} - X_i\right)^2 = \left(\overline{X} - X_1\right)^2 + \left(\overline{X} - X_2\right)^2 + \ldots + \left(\overline{X} - X_n\right)^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{X} - X_i\right)^2 = n\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} = -n\overline{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$$

entonces, reemplazando en el error medio cuadrático:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - X_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \overline{X}^2\right)} \,,$$

$$m = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \,.$$

Esto es, el error medio cuadrático se define como la raíz cuadrada de la diferencia entre el valor medio de los cuadrados de los valores experimentales observados, y el cuadrado del valor medio de esas mediciones.

Si el número de las observaciones experimentales *n* no es muy pequeña, y estas no difieren demasiado entre sí, se puede afirmar que el valor medio o promedio aritmético de dichas observaciones, se mantiene sensiblemente constante referido a su número. Así de la fórmula del error medio cuadrático, se puede decir bajo las condiciones anteriores, que este valor es aproximadamente invariante respecto del número de mediciones.

Postulados fundamentales de la teoría estadística de errores.

La teoría estadística de errores debida básicamente a GAUSS, se funda en tres postulados fundamentales:

1. El valor más probable de una serie de mediciones, efectuadas en idénticas condiciones, es el valor medio de las mismas.
2. Es igualmente probable en una serie de mediciones, cometer errores absolutos de idéntica magnitud y distinto signo.

3. En una serie de mediciones, es tanto más probable el cometer errores verdaderos cuanto menor sea su magnitud.

Estos postulados que pueden parecer intuitivos, no son en modo alguno evidentes, esto es, su aceptación como base de la teoría estadística de errores se debe a que los hechos que derivan de ellos se corresponden satisfactoriamente con un gran cúmulo de evidencia experimental.

Debe entenderse por términos estadísticos, que si p.e. la probabilidad de obtener un *1* arrojando un dado es de *1/6*, ello no significa que de cada *6* tiros obtendremos forzosamente un *1*, pero indica que si arrojamos el dado un número suficientemente grande de veces, digamos, *600*, la cantidad de veces que aparecerá el *1* será un número muy próximo a *100*.

Error del promedio de una medición directa.
Si pudiera determinarse rigurosamente el valor del error del promedio *E* y su signo, de una determinada medición, podría conocerse claramente su verdadera magnitud, dada por, $E = X - \overline{X}$.
Pero esto no es posible, y sólo está la posibilidad de calcular el error *E* en sentido estadístico, de modo que no es posible obtener el verdadero valor *X*, sino que se encontrará en un intervalo bien definido por,

$$\left[\overline{X} - E, \overline{X} + E\right].$$

De modo que el valor de *E* define un intervalo cerrado de amplitud *2E*, dentro del cual probablemente se encuentre la verdadera magnitud *X* de la medición. Cuanto menor resulte este intervalo de incertidumbre mayor resultará la precisión del promedio de las observaciones, $K = \dfrac{\overline{X}}{E}$.
El cálculo del error del valor medio *E*, es en consecuencia, de fundamental importancia para la acotación de la incertidumbre de un <u>conjunto de observaciones que determinan una medición física</u>.
Entonces, se sigue:

$$E = X - \overline{X} = \xi_i + X_i - (x_i + X_i) = \xi_i - x_i \ ,$$

también es, $x_i = \xi_i - E$,
donde como antes, el subíndice *i* indica la *i-ésima* observación que compone la medición.
De la fórmula del error medio cuadrático *m*,

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - E)^2} \ ,$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2} - 2E\sum_{i=1}^{n} \xi_i + nE^2\right)}$$, pero vimos que el error absoluto del promedio es el promedio de los errores absolutos, en consecuencia:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2} - E^2} \ .$$

De $E = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i$,y elevando al cuadrado se sigue,

$$E^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2$$, en donde es sencillo probar que,

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2} + \frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j}^{n} \xi_i \xi_j \ .$$

Donde en la sumatoria se anulan explícitamente los términos de igual subíndice.
Ahora bien, de acuerdo al segundo postulado de GAUSS, existe <u>estadísticamente</u> idéntica posibilidad de cometer errores absolutos de igual magnitud y distinto signo, esto es, es igualmente probable el cometer un error $+\xi_i$, que $-\xi_i$. Luego en términos estadísticos existirá por cada valor $+\xi_i \xi_j$ otro negativo $-\xi_i \xi_j$. Esto hace que <u>estadísticamente</u> el segundo sumando del segundo miembro de anule, y en consecuencia,

$$E^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2}$$,finalmente:

$$E = \pm \frac{m}{\sqrt{n-1}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - X_i\right)^2}}{\sqrt{n-1}}$$

Estadísticamente tendremos definido el valor de la verdadera magnitud de la medición de *X*, como:

$$\overline{X} - \frac{m}{\sqrt{n-1}} \leq X \leq \overline{X} + \frac{m}{\sqrt{n-1}}$$

Las mediciones experimentales se expresan habitualmente,

$$X = \overline{X} \pm \frac{m}{\sqrt{n-1}}$$

con la interpretación que se desprende de la forma anterior.
Ya hemos visto que para un número convenientemente grande de observaciones, el error medio cuadrático *m* es prácticamente invariante respecto del numero de dichas observaciones. Esto es de considerable importancia práctica, puesto que es inmediato que el error del promedio *E*, decrece en forma inversamente proporcional en forma aproximada con el número $\sqrt{n-1}$.
Además podemos deducir que si el número de observaciones *n* con las cuales se intenta determinar el verdadero valor de una medición física, es tendiente a infinito, el error del promedio se anula. En este extremo, es claro, que los errores aparentes coinciden con los absolutos En consecuencia el verdadero valor de una magnitud se obtiene como el promedio o valor medio aritmético de infinitas observaciones realizadas con un instrumento y método de medición carentes de errores sistemáticos. Sin embargo en la práctica no existen instrumentos de medición carentes completamente de errores metodológicos.
Una observación importante la constituye el hecho de calcular el error del promedio *E*, cuando únicamente se realizó una sola observación al intentar medir una determinada magnitud. Es claro que el valor de *E* se indetermina, $E = \frac{0}{0}$. Lo cual merece una explicación: Tiene sentido en principio que no sepamos que error estamos cometiendo en una medición si sólo hicimos una única observación, esto es porque si realizamos *n* observaciones y las magnitudes *X'* halladas difieren en pequeñas cantidades podemos decir que la medición es precisa, luego si los valores de *X'* difieren sensiblemente decimos que la medición es imprecisa, pero nada podremos decir con una única observación, no tendremos referencias.
Sin embargo, y como ya se mencionó, con una única observación sólo podremos determinar el error máximo que se comete, en función de la apreciación del instrumento de medida. P.e. en una escala con vernier, la apreciación de ésta, *1/10,1/20* o *1/50 mm*; sólo indica el error máximo posible de cometer en una medición realizada a través de una única observación. Aumentando en número de éstas, reduciremos el error cometido en la medición.

Sea p.e. que se quiera determinar el diámetro de una esferita de acero con un tornillo micrométrico.
Realizamos primeramente *5* observaciones, a saber:
$X_1 = 1.26\ mm$
$X_2 = 1.30\ mm$
$X_3 = 1.19\ mm$
$X_4 = 1.20\ mm$
$X_5 = 1.33\ mm$
El valor medio, $\overline{X} = \frac{1.26 + 1.30 + 1.19 + 1.20 + 1.33}{5} \cong 1.26\ \ mm$

Los errores aparentes,
$x_1 = \ 0\ mm$
$x_2 = -0.04\ mm$
$x_3 = \ 0.07\ mm$
$x_4 = \ 0.06\ mm$
$x_5 = -0.07\ mm$

El error medio cuadrático,

$$m = \sqrt{\frac{1}{5}\left(0 + 0.04^2 + 0.07^2 + 0.06^2 + 0.07^2\right)} \cong 0.055 \ \ mm$$

El error del valor medio,

$$E = \frac{0.055}{\sqrt{5-1}} \cong 0.027 \ \ mm$$

Finalmente la medición se expresa:

$$X = 1.26 \pm 0.03 \ \ mm$$

Mediante *15* observaciones, a saber:

$X_1 = 1.25\ mm$
$X_2 = 1.32\ mm$
$X_3 = 1.20\ mm$
$X_4 = 1.25\ mm$
$X_5 = 1.33\ mm$
$X_6 = 1.26\ mm$
$X_7 = 1.30\ mm$
$X_8 = 1.18\ mm$
$X_9 = 1.21\ mm$
$X_{10} = 1.31\ mm$
$X_{11} = 1.27\ mm$
$X_{12} = 1.20\ mm$
$X_{13} = 1.19\ mm$
$X_{14} = 1.26\ mm$
$X_{15} = 1.30\ mm$

El valor promedio,

$$\overline{X} \cong 1.253 \ \ mm$$

Los errores aparentes,

$x_1 = 0\ mm$
$x_2 = -0.07\ mm$
$x_3 = 0.05\ mm$
$x_4 = 0\ mm$
$x_5 = -0.08\ mm$
$x_6 = -0.01\ mm$
$x_7 = -0.05\ mm$
$x_8 = 0.07\ mm$
$x_9 = 0.04\ mm$
$x_{10} = -0.06\ mm$
$x_{11} = -0.02\ mm$
$x_{12} = -0.05\ mm$
$x_{13} = 0.06\ mm$
$x_{14} = -0.01\ mm$
$x_{15} = -0.05\ mm$

El error medio cuadrático,

$m = 0.049\ mm$

El error del valor medio,

$E = 0.013\ mm$

Entonces la medición sería:

$$X = 1.25 \pm 0.02 \ \ mm$$

El error de la medición disminuyó sensiblemente al aumentar el número de mediciones de *5* a *15*.

En este ejemplo el error de apreciación del tornillo micrométrico debe rondar en el mejor de los casos el valor *0.05 mm*, sensiblemente mayor que el error del promedio, en ambos casos. De lo dicho últimamente, se podría pensarse erróneamente que aumentando tanto como se quiera el número de observaciones es posible disminuir tanto como se quiera el error de la medición. Esto no es así puesto que si $E <<$ apreciación, tal medición no es repetible (el instrumento está en condiciones de asegurar sus lecturas con un intervalo de incerteza del orden de la apreciación, o a los sumo un orden

menor pero no menos) y por los tanto sin sentido físico. Por lo tanto si se quiere alcanzar el límite de la información obtenible con un aparato, hay que calcular un número de lecturas tal que con él se obtenga un *E* del orden de magnitud de (o a lo sumo 0.1 veces) de la apreciación del mismo.
Notar que si hubiéramos realizado una sola observación el error de la medición sería de *0.05 mm*.

Acotación del número de cifras significativas.
El cálculo numérico responsable de determinar el valor medio de una serie de observaciones, en el caso general, entregará un valor con un número indeterminado de cifras. El problema de determinar que cantidad de cifras conllevan información cierta, y cuales se deben al mero cálculo numérico, sin ningún significado físico; posee solución aceptable considerando un número de cifras significativas en el valor medio hasta la primer cifra dudosa acotada por el error de apreciación. Si embargo si el número de observaciones es bastante grande, mayor que *15* o *20*, se tomará una cifra más del valor medio que la acotación que da el error de apreciación, esto es, debido al hecho que el error del promedio disminuye al aumentar el número de observaciones.
P.e. si la operación de calcular el valor medio da *2.26287*, y se realizaron *3* observaciones con un instrumento de error de apreciación *0.1*, se aceptará el valor medio como, *2.3*. Pero si la cantidad de observaciones es *20*, y el valor de *E* resulta p.e. *0.05* es conveniente adoptar $\overline{X}' = 2.26$, entonces el resultado final correcto se expresa: $X = 2.26 \pm 0.05$.

Errores casuales en las mediciones indirectas.
Valor más probable de las mediciones indirectas.
Sea una determinada medición física que responde a la ley, $L = f_{(X)}$, de modo que únicamente dependa de la medición directa *X*.
Siendo *n* las observaciones experimentales directas de *X*, X_1, X_2, X_3,..., X_i,..., X_n, tendremos un conjunto de *n* observaciones de *L*, a saber:

$$L_{(X_1)}, L_{(X_2)}, \ldots, L_{(X_i)}, \ldots, L_{(X_n)}$$

De acuerdo al primer postulado de la teoría estadística de errores, el valor medio de las observaciones $L_{(X_i)}$, es:

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_{(X_i)} .$$

Si el número de observaciones es muy elevado o si la ley física es compleja, el cálculo de $\overline{L}$ puede hacerse tedioso. Pero existe, sin embargo una forma más elegante de calcular dicho número. Sea el valor medio de las observaciones directas X_i,

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces podemos expresar la observación i-ésima como,

$X_i = \overline{X} - x_i$.

Desarrollando en serie de TAYLOR, con la precisión de hasta los infinitésimos de primer orden, de la función correspondiente a la observación i-ésima, se sigue,

$L_{(X_i)} \cong L_{(\overline{X})} + \frac{\partial L}{\partial \overline{X}}\left(X_i - \overline{X}\right) = L_{(\overline{X})} - \frac{\partial L}{\partial \overline{X}} x_i$.

Calculando el promedio:

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_{(X_i)} \cong L_{(\overline{X})} - \frac{1}{n}\frac{\partial L}{\partial \overline{X}}\sum_{i=1}^{n} x_i = L_{(\overline{X})} ,$$

dado que por definición, la suma de los valores de los errores aparentes es nula. El resultado anterior es inmediato a una medición indirecta basada en cualquier número de mediciones directas.
Luego:
El valor más probable de una medición indirecta es el que se obtiene evaluando la función en el valor medio de las observaciones directas.

$$\overline{L} = L_{(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \ldots)}$$

Error medio cuadrático de una medición indirecta.

Definimos por simple extensión, el valor del error aparente de la medición indirecta ***L***, como:

$$l_i = \overline{L} - L_i \, .$$

Y en consecuencia el error medio cuadrático es,

$$m_L = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{L} - L_i\right)^2} \, ,$$

donde podemos aproximar como antes,

$$L_{(X_i)} \cong L_{(\overline{X})} + \frac{\partial L}{\partial \overline{X}}\left(X_i - \overline{X}\right) = L_{(\overline{X})} - \frac{\partial L}{\partial \overline{X}} x_i \, ,$$

y dado que, como vimos, $\overline{L} = L_{(\overline{X})}$, se tiene:

$L_{(X_i)} \cong \overline{L} - \frac{\partial L}{\partial \overline{X}} x_i$. Luego el error medio cuadrático vale,

$$m_L = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{X}} x_i\right)^2} = \frac{\partial L}{\partial \overline{X}} m_X$$

La generalización para un número cualquiera de observaciones directas, en consecuencia es:

$$m_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{X}}\right)^2 m_X^{\,2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \overline{Y}}\right)^2 m_Y^{\,2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \overline{Z}}\right)^2 m_z^{\,2} + \ldots} \, .$$

Error del valor más probable de una medición indirecta.

El caso es tratar de determinar el error del valor más probable $\overline{L}$.

$$E_L = L - \overline{L}$$

Es natural proceder del mismo que se utilizó para determinar el error del promedio en una medición directa; suponiendo una ley física ahora del tipo $L = f_{(X_i, Y_j)}$, con ***n*** observaciones de la variable $\boldsymbol{X}$,

$i = 1,2,3,...,n$

y p observaciones de la variable Y,

$j = 1,2,3,...,p$.

El error aparente por extensión vale,

$l_{ij} = \overline{L} - L_{ij}$

y el error absoluto de un valor L_{ij} ,

$\xi_{L_{ij}} = L - L_{ij}$.

También:

$E_L = L - \overline{L} = \xi_{L_{ij}} + L_{ij} - \left(l_{ij} + L_{ij}\right) = \xi_{L_{ij}} - l_{ij}$,

luego, $l_{ij} = \xi_{L_{ij}} - E_L$.

La fórmula del error medio cuadrático extendida naturalmente a una ley física de dos variables será:

$$m_L = \sqrt{\frac{1}{np}\sum_{i,j=1}^{n,p} l_{ij}^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{np}\sum_{i,j=1}^{n,p}\left(\xi_{L_{ij}} - E_L\right)^2} \, ,$$

pero,

$$\frac{1}{np}\sum_{i,j=1}^{n,p}\left(\xi_{L_{ij}} - E_L\right)^2 = \frac{1}{np}\left(\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}^{\,2} - 2E_L\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}} + npE_L^{\,2}\right),$$

y dado el hecho que por definición, la suma de los errores aparentes es nula,

$\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}} = npE_L$, es inmediato que:

$$m_L{}^2 = \frac{1}{np}\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}{}^2 - E_L{}^2 \ .$$

Haciendo el cuadrado de la doble sumatoria, es,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{1j}} + \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{2j}} + \ldots + \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{nj}}\right)^2 =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{1j}}\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{nj}}\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{1j}}\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{2j}} + \ldots + \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{nj}}\right) +$$

$$2\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{2j}}\left(\sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{3j}} + \ldots + \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{nj}}\right) + \ldots \ .$$

Luego, y dado el hecho que existe en términos estadísticos idéntica posibilidad de cometer errores absolutos de igual magnitud y sentido contrario, se sigue:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{1j}}{}^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{p}\xi_{L_{nj}}{}^2 = \sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}{}^2 = (npE_L)^2 \ .$$

Entonces reemplazando en la expresión de m_L,

$$m_L{}^2 = \frac{1}{np}\sum_{i,j=1}^{n,p}\xi_{L_{ij}}{}^2 - E_L{}^2 = npE_L{}^2 - E_L{}^2 \ ,$$

finalmente se obtiene:

$$E_L = \pm\frac{m_L}{\sqrt{np-1}} \ .$$

Cuando se trata de una medición indirecta a través de varias mediciones directas con distinto número de observaciones, sean éstas, *X* con *n* observaciones, *Y* con *p* observaciones, *Z* con *q* observaciones, Se tendrá en consecuencia:

$$E_L = \pm\frac{m_L}{\sqrt{npq-1}} \ .$$

Sea p.e. que se quiere determinar el valor del módulo de YOUNG por tracción:

$$\Psi = \frac{Pl}{\pi R^2 \Delta l} \ ,$$

siendo *P* el esfuerzo de tracción que sobre un alambre de radio *R* y longitud *l* produce un estiramiento Δl.

Por la fórmula del error relativo:

$$\frac{\Delta\Psi}{\Psi} = \pm\left\{\left|\frac{\partial\, ln|\Psi|}{\partial P}\Delta P\right| + \left|\frac{\partial\, ln|\Psi|}{\partial l}\Delta l\right| + \left|\frac{\partial\, ln|\Psi|}{\partial \Delta l}\Delta\Delta l\right| + \left|\frac{\partial\, ln|\Psi|}{\partial R}\Delta R\right|\right\} .$$

Donde se despreció el error de π.

Aplicando logaritmo de NEPER a la fórmula del módulo de YOUNG se sigue, por propiedad de logaritmos:

$$ln|\Psi| = ln|P| + ln|l| - 2\, ln|R| - ln|\Delta l| \ .$$

Y entonces podemos apreciar las fuentes sustanciales de error, causadas por los errores en las mediciones directas.

$$\frac{\Delta\Psi}{\Psi} = \pm\left\{\left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta l}{\partial l}\right| + \left|2\frac{\partial \Delta l}{\Delta l}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right|\right\}$$

Siendo l del orden del metro, P del orden del Kgf, R del orden de algunas pocas décimas de milímetro, al igual que Δl, es claro que midiendo la longitud con una escala milimetrada, y determinando el esfuerzo con un dinamómetro con escala en gramos, los errores cometidos en estas mediciones son insignificantes frente a los que se cometen midiendo las magnitudes del radio y elongación del alambre. Luego sólo consideraremos estos errores.

Datos arrojados experimentalmente:

R(mm)	*Δl(mm)*
0.28	*0.312*
0.27	*0.320*
0.29	*0.310*
0.28	*0.315*
0.25	*0.317*

Siendo $l = 1140\ mm$ (con error despreciable).

$P = 1\ Kgf$ (con error despreciable).

Los valores promedio: $\bar{R} = 0.274mm$, $\Delta\bar{l} = 0.3148mm$.

Los errores aparentes:

r(mm)	*δl(mm)*
-0.006	*0.0028*
0.004	*-0.0052*
-0.016	*0.0048*
-0.006	*-0.0002*
0.024	*-0.0022*

Los errores medios cuadráticos para la mediciones directas:

$$m_R = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} r_i^2} = 0.013mm,$$

$$m_{\Delta l} = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \delta l_i^2} = 0.0035mm.$$

El error medio cuadrático para la medición de Ψ:

$$m_\Psi = \sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{R}}\right)^2 m_R^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Delta\bar{l}}\right)^2 m_{\Delta l}^2},$$

donde,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{R}} = -2\frac{Pl}{\pi\Delta\bar{l}\bar{R}^3} \cong 112\times10^3\frac{Kgf}{mm^3},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Delta\bar{l}} = -\frac{Pl}{\pi\bar{R}^2\Delta\bar{l}^2} \cong 488\times10^2\frac{Kgf}{mm^3}$$

entonces,

$$m_\Psi \cong 1466\frac{Kgf}{mm^2}.$$

Finalmente el error del promedio cometido en la determinación de Ψ:

$E_\Psi = \pm\frac{m_\Psi}{\sqrt{np-1}}$, aquí las cantidades de observaciones son iguales entre sí e iguales a 5, entonces,

$$E_\Psi \cong \pm3\times10^2\frac{Kgf}{mm^2}.$$

El módulo de YOUNG debe darse de acuerdo a las observaciones directas realizadas, como:

$\Psi = \bar{\Psi} \pm E_\Psi$, con $\bar{\Psi} = 15.3\times10^3\frac{Kgf}{mm^2}$,

luego es,

$$\Psi = 15.3\times10^3 \pm 3\times10^2\frac{Kgf}{mm^2}.$$

Comparación de mediciones de distinta precisión.
Peso de una observación.
El postulado sobre el valor promedio o valor medio, como el valor más probable de una determinada magnitud medida, se refiere únicamente a observaciones realizadas en idénticas circunstancias. Luego si se realizan las observaciones destinadas a la medición con instrumentos de medición de diferente precisión el valor más probable ya no es el valor medio aritmético. Esto no implica sin embargo desechar las observaciones realizadas con el instrumento de menor precisión, puesto que como se verá; todas las observaciones aunque en diferente medida contribuyen a mejorar la medición. El grado de contribución o preponderancia de una serie de observaciones en la definición del valor más probable de la medición es lo que se denomina peso de una observación.

Error medio de una observación.
Para efectuar la comparación de una serie de observaciones de diferentes pesos, es necesario disponer de un criterio de reducción. Definamos el error medio cuadrático de los errores absolutos μ:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}}\ .$$

Podremos calcular en forma práctica el valor de μ si podemos evaluarlo en función de los errores aparentes. Luego,

$$\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X - X_i\right)^2 = X^2 - \frac{2X}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}$$

pero, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{X}$, entonces,

$$\mu^2 = X^2 - 2X\overline{X} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\ .$$

Pero de la definición de E y elevando al cuadrado, se sigue, $E^2 = X^2 - 2X\overline{X} + \overline{X}^2$, que reemplazada en la fórmula de μ nos da,

$\mu^2 = E^2 - \overline{X}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}$, recordando que , $m = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2}$ **,** se sigue:

$$\mu^2 = E^2 + m^2\ ,$$

con $E = \frac{m}{\sqrt{n-1}}$, luego,

$$\mu = \pm m\sqrt{\frac{n}{n-1}} = E\sqrt{n}$$

La utilidad de μ es como criterio de comparación de pesos de observaciones con diferente precisión.

Pesos de observaciones de diferente precisión.
Con el objetivo de poder deducir la expresión más probable de una serie de observaciones realizadas con diferente precisión, concentrémonos primeramente en el caso particular de observaciones realizadas en idénticas condiciones y sobre un misma magnitud pero con un número diferente cada vez. Sean éstas:

$X'_i\ , i = 1,2,3,\ldots,n.$

$X''_j\ , j = 1,2,3,\ldots,p.$

$X'''_k\ , k = 1,2,3,\ldots,q.$

El valor medio en este caso responde al significado que le asigna el segundo postulado de GAUSS, así, será el valor más probable de las (n + p + q) observaciones realizadas.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X'_i + \sum_{j=1}^{p} X''_j + \sum_{k=1}^{q} X'''_k}{n+p+q},$$

llamando $\overline{X}', \overline{X}'', \overline{X}'''$, a los valores medios de las distintas series de observaciones es,

$$\overline{X} = \frac{n\overline{X}' + p\overline{X}'' + q\overline{X}'''}{n+p+q}.$$

Claramente se deduce que si algún número de observaciones es manifiestamente mayor que el resto, el valor más probable estará dominado por dicha serie de observaciones, esto es, en el caso visto, los números *n,p,q*, pueden considerarse una medida del peso de las respectivas series de observaciones.
Calculando ahora el error de los valores medios parciales de las diferentes series de observaciones, es:

$E' = \frac{\mu}{\sqrt{n}}, E'' = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, E''' = \frac{\mu}{\sqrt{q}}$, de donde obtenemos las siguientes igualdades,

$$E'\sqrt{n} = E''\sqrt{p} = E'''\sqrt{q} = \sqrt{1}\mu$$

De lo cual y siendo el número de mediciones una medida del peso de las observaciones, se interpreta μ como el error del promedio de una serie de observaciones de peso unidad.
Podemos generalizar la conclusión anterior; definamos ahora que el peso de las observaciones sean ahora *a,b,c,* siendo estos números ya no evidentemente números enteros.

$$E'\sqrt{a} = E''\sqrt{b} = E'''\sqrt{c} = \mu = constante.$$

Naturalmente el valor medio es ahora,

$$\overline{X}_p = \frac{a\overline{X}' + b\overline{X}'' + c\overline{X}'''}{a+b+c}$$

que se denomina valor medio ponderado. Con la siguiente interpretación:
Los errores relativos de las distintas series de mediciones serán, $\frac{E'}{\overline{X}}, \frac{E''}{\overline{X}}, \frac{E'''}{\overline{X}}$, siendo $\overline{X}$, el valor más probable de la magnitud *X*. Luego, dividiendo por $\overline{X}$ la igualdad $E'\sqrt{a} = E''\sqrt{b} = E'''\sqrt{c} = \mu = constante$, se sigue:

$$\frac{E'}{\overline{X}}\sqrt{a} = \frac{E''}{\overline{X}}\sqrt{b} = \frac{E'''}{\overline{X}}\sqrt{c} = \frac{\mu}{\overline{X}} = constante.$$

Resulta entonces que los valores $\sqrt{n}, \sqrt{p}, \sqrt{q}$, representan los factores de conversión de los errores relativos de las diferentes series de observaciones al error relativo de una serie de observaciones de peso unidad.
Para efectuar en la práctica el cálculo del valor medio ponderado, valor más probable de las series de mediciones realizadas en diferentes circunstancias, se procede:

$$\overline{X}_p = \frac{a\overline{X}' + b\overline{X}'' + c\overline{X}'''}{a+b+c} = \frac{\left(\frac{\mu}{E'}\right)^2 \overline{X}' + \left(\frac{\mu}{E''}\right)^2 \overline{X}'' + \left(\frac{\mu}{E'''}\right)^2 \overline{X}'''}{\left(\frac{\mu}{E'}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E''}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E'''}\right)^2},$$

y en forma simplificada,

$$\overline{X}_p = \frac{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 \overline{X}' + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 \overline{X}'' + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2 \overline{X}'''}{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}$$

Error del valor medio ponderado.

Obtener el valor del valor medio ponderado no significa mucho si no sabemos de la incertidumbre que lo afecta. El caso es ahora determinar el error del valor medio ponderado. Sea que queremos comparar una serie de valores medios ponderados de la misma magnitud *X*, sean éstos,

$$\overline{X}_{pi} = \frac{a_i \overline{X}'_i + b_i \overline{X}''_i + c_i \overline{X}'''}{a_i + b_i + c_i}.$$

Deberemos suponer por natural extensión, que el peso del valor medio ponderado $\overline{X}_{pi}$, es $a_i + b_i + c_i$. En consecuencia <u>el peso del valor medio ponderado es la suma de los pesos de las diferentes observaciones en los que que se basa</u>.

Según esto el error del valor medio ponderado E_p, debe cumplir:

$$E_p \sqrt{a+b+c} = E' \sqrt{a} = E'' \sqrt{b} = E''' \sqrt{c} = \mu = constante,$$

se sigue,

$$E_p \sqrt{a+b+c} = E' \sqrt{a} = E'' \sqrt{b} = E''' \sqrt{c} = \mu = constante$$

entonces,

$$E_p{}^2 = \frac{\mu^2}{(a+b+c)} = \frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu}{E'}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E''}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E'''}\right)^2},$$

simplificando finalmente obtenemos:

$$E_p{}^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}.$$

La observación experimental de la medición de *X* en función de observaciones de diferente peso, debe darse en forma simbólica como:

$$X = \overline{X}_p \pm E_p.$$

Sea p.e. que se requiera determinar el valor más probable de la longitud *L* de una barra rígida realizada con una regla milimetrada, y con una escala provista con vernier. Sean estas mediciones:

$$L_{regla} = 250.0 \pm 0.3mm$$

$$L_{vernier} = 250.25 \pm 0.05mm$$

El valor medio ponderado será:

$$\overline{L}_p = \frac{\left(\frac{1}{E_{regla}}\right)^2 L_{regla} + \left(\frac{1}{E_{vernier}}\right)^2 L_{vernier}}{\left(\frac{1}{E_{regla}}\right)^2 + \left(\frac{1}{E_{vernier}}\right)^2},$$

$$\overline{L}_P = \frac{\frac{250}{0.3^2} + \frac{250.25}{0.05^2}}{\frac{1}{0.3^2} + \frac{1}{0.05^2}} mm = 250.24mm$$

El valor del valor medio ponderado:

$$E_p = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{vernier}}\right)^2 + \left(\frac{1}{E_{regla}}\right)^2}},$$

$$E_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0.05}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.3}\right)^2}} mm = 0.05mm$$

La medición se expresa:

$L = 250.24 \pm 0.05mm$

En este caso es claro que la precisión de la medición con el vernier es de un orden mayor que la realizada por la regla; y en consecuencia aquella medición es de mayor peso que la realizada con la regla. Esto se pone de manifiesto en el valor medio ponderado que apenas si difiere de la obtenida con el vernier siendo el error prácticamente idéntico. Sin embargo la medición realizada con la regla contribuye a reducir la incertidumbre de la medición, y no debe despreciarse.

Ley de distribución de GAUSS.

Se define como probabilidad simple de un acontecimiento casual a la relación entre el número de casos favorables y el de los casos posibles. De este modo la probabilidad de que acontezcan dos hechos indistintamente tales que puedan desarrollarse independientemente, es la suma de probabilidades simples. Luego la probabilidad de que acontezca dos hechos en forma simultánea con independencia entre sí es el producto de las probabilidades simples de que suceda cada hecho.

Los casos nombrados involucran un número discreto de casos posibles; sin embargo acontece en ocasiones que los casos posibles forman una distribución continua, y en consecuencia la solución de estos tipos de problemas exige la introducción de una función llamada función de distribución de probabilidades. Este es el caso de los errores en las mediciones físicas, y la función aquí se denomina función de la distribución de errores o función de GAUSS.

Definición y propiedades de la función de distribución de errores.

Si se efectúan un número muy grande de observaciones con un instrumento de medición carente de errores sistemáticos, los errores aparentes se aproximan como vimos a los errores verdaderos dado que E tenderá a cero. La función de distribución de errores posee argumento continuo en el intervalo $(-\infty,+\infty)$, luego es indistinto considerar que el campo de variabilidad es de errores verdaderos o de errores aparentes; además como prácticamente no se dispone de la posibilidad de poder realizar infinitas observaciones, los errores verdaderos se sustituyen por los aparentes; por lo que, y a pesar de que el número de observaciones sea finito (pero grande) el dominio de la función de GAUSS será el de los errores aparentes.

Se define la función distribución de errores de modo que la probabilidad de cometer un error aparente de magnitud x comprendido entre dos valores infinitamente próximos, x y $x+dx$, esté dada por:

$$\varphi_{(x)} dx \ .$$

Aún desconociendo la ley funcional da la distribución de errores, en función de los postulados ya visto pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

1. Por el segundo postulado, es claro que la función debe ser simétrica respecto de las ordenadas, esto es, debe ser una función par:

$$\varphi_{(x)} = \varphi_{(-x)} \ .$$

2. Por el tercer postulado es claro que la función debe poseer un máximo en el origen, luego:

$$\frac{d\varphi_{(0)}}{dx} = 0 \text{ , y } \frac{d^2\varphi_{(0)}}{dx^2} < 0 \ .$$

3. La probabilidad $P_{(x_1,X_2)}$ de cometer un error cuya magnitud se encuentre en un intervalo finito (x_1,x_2), es la suma de las probabilidades de cada uno de los errores incluidos en el intervalo, esto es:

$$P_{(x_1,x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{(x)} dx$$

4. La probabilidad de cometer un error en el intervalo (**-∞,+∞**) es desde luego la certeza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(x)} dx = 1$$

5. La probabilidad de cometer un error infinitamente grande debe ser nula:

$$\varphi_{(-\infty)} = \varphi_{(+\infty)} = 0$$

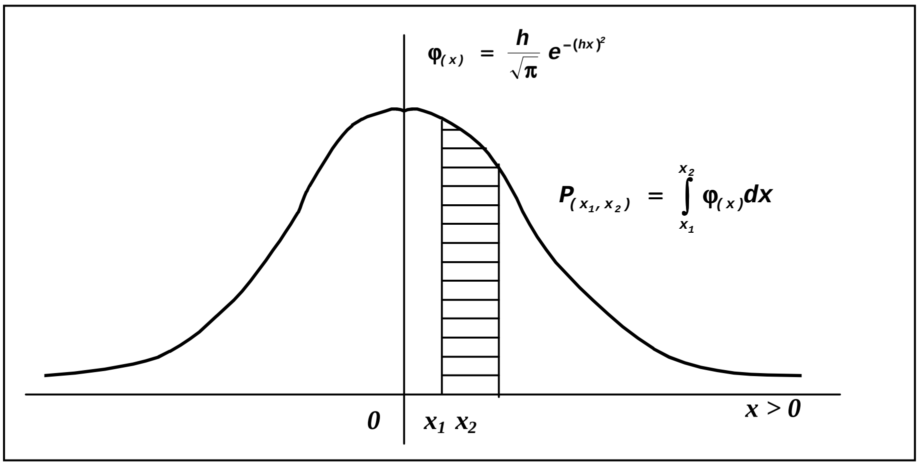
6. La probabilidad de cometer en dos observaciones sucesivas los errores x_1 y x_2, comprendidos en los intervalos (x_1, $x_1 + dx$) y (x_2, $x_2 + dx$), es la probabilidad compuesta:

$$\varphi_{(x_1)} dx \varphi_{(x_2)} dx$$

Mediante estas propiedades se demuestra que la función distribución de errores es de la forma:

$$\varphi_{(x)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-(hx)^2}$$

donde *h* es un constante cuyo significado se determinará luego.
La representación geométrica de la función distribución de GAUSS, es la siguiente:



Donde se ve la interpretación geométrica de la probabilidad de cometer el error comprendido en el intervalo (x_1,x_2).

Significado de h.
La ordenada en el origen ($x = 0$) vale:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

Es evidente entonces, que siendo la integral de la función distribución extendida a todo el dominio la unidad, que si la función presenta una elevada ordenada al origen, los errores están más concentrados en torno al valor nulo, siendo entonces pequeña la probabilidad de cometer errores grandes; y al contrario, si la ordenada al origen es menor, los errores se encuentran más extendidos y la probabilidad de cometer errores mayores aumenta. Luego, resulta natural asociar a la magnitud *h* con la precisión del método o del instrumento que arrojó dicha distribución, esto es, si la precisión de la medición es elevada las observaciones realizadas en la medición difieren en pequeñas cantidades entre sí, y los errores se encontrarán concentrados en torno al valor nulo. En cambio, si el método o instrumento no reproducen bien las observaciones, la dispersión de los errores aumenta, extendiéndose hacia valores más grandes. Queda claro entonces porque GAUSS llamó a esta constante precisión del método o del instrumento.

Cálculo práctico de h.
Sea *n* un número grande de mediciones de la magnitud *X*. El error medio cuadrático es:

$$m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \ .$$

Luego, la probabilidad de obtener un error de magnitud $\boldsymbol{x_i}$, será,

$\varphi_{(x_i)}dx = \dfrac{n_i}{n}$, siendo n_i la cantidad de observaciones afectadas de ese error.

Entonces evidentemente el error medio cuadrático puede escribirse como:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_{(x)} dx \ .$$

Notar que estamos considerando un número infinito de observaciones, integramos en un argumento continuo.

En la práctica, sólo es posible lograr un número grande pero finito de observaciones; sin embargo, siendo ese número lo suficientemente grande permite utilizando la integral anterior estimar de modo aproximado la constante *h*. En efecto:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_{(x)} dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(hx)^2} dx \ ,$$

integrando y teniendo en cuenta que el área de la superficie limitada por la curva de la función distribución en todo el dominio es la unidad, se tiene:

$$m^2 = \frac{1}{2h^2} \ , \ h = \frac{1}{\sqrt{2}m} \ .$$

Donde si el número de observaciones *n* es grande pero finito, se sigue:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}} \ .$$

Compensación de errores por el método de los mínimos cuadrados.

Sea que se conozca la forma de la ley física que relaciona las magnitudes medibles en forma directa (*X*, *Y*, *Z*,...) y los parámetros (*A*, *B*, *C*,...):

$$f_{(X,Y,Z,...;A,B,C,...)} = 0 \ .$$

Para poder determinar los valores de los parámetros se necesitarán como mínimo tantas ecuaciones como parámetros se necesiten determinar, lo cual se logra variando las condiciones de medida tantas veces como resulte necesario; pero ello implica una única medición de cada uno de los parámetros, entonces será necesario realizar un gran número de observaciones en distintas condiciones, de modo de mejorar la precisión de estas mediciones. Sean X_i, Y_i,..., los valores medidos de las magnitudes *X*, *Y*,..., en una cualquiera de dichas condiciones, las mediciones no estarán desprovistas de errores experimentales de modo que al introducirlos en la expresión de la ley física obtendremos:

$$f_{(X_i,Y_i,Z_i,...;A,B,C,...)} = e_i \ .$$

Siendo $\boldsymbol{e_i}$ el error proveniente de los errores de que están afectados los valores *X*, *Y*, *Z*,....

Para determinar los valores más probables de los parámetros, sean éstos, $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\ldots$,es necesario que la <u>suma de los cuadrados de los errores e_i resulte mínima</u>. Se realiza la suma de los cuadrados de los errores de modo que la suma resulte significativa, puesto que éstos pueden ser tanto positivos como negativos, sumarlos no nos dice demasiado acerca de la precisión en la elección del valor de los parámetros dado que pudiendo ser grandes se cancelarían parcialmente entre sí resultando posiblemente en un pequeño valor sin significación. Por esto es que se realiza la suma de los cuadrados de los errores, con lo cual se asegura que todos los términos resulten positivos. La suma tiene la forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} f_{(X,Y,Z,...;A,B,C,...)} \ .$$

La condición de mínimo, sabemos que implica:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{A=\overline{A}} = \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_{B=\overline{B}} = \ldots = \left(\frac{\partial S}{\partial Z}\right)_{Z=\overline{Z}} = 0$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones normales, y nos proveen la relación entre las magnitudes medibles en forma directa *X*, *Y*, *Z*,...,y los valores más probables de los parámetros, calculables a partir de dichas ecuaciones.

Sea p.e. que se requiera determinar el valor de la constante elástica de un resorte. Se sabe en virtud de la validez de la ley de HOOKE que entre la fuerza tensora $\overline{F}$ y el alargamiento $\overline{\varepsilon}$ existe una relación lineal de la forma:

$\overline{F} = K\overline{\varepsilon}$.

Donde el parámetro *K* es la constante elástica del resorte.

Sea que se realizaron *5* mediciones, a saber:

F(gf)	*ε(cm)*
20	*1.21*
40	*2.43*
60	*3.60*
80	*4.86*
100	*6.08*

La suma de los cuadrados de los errores:

$S = \sum_{i=1}^{n} e_i$, con $F_i - K\varepsilon_i = 0$, se sigue,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - K\varepsilon_i\right)^2$$

Debemos cumplir con la condición de que dicha suma se haga mínima, para ello debe ser:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial K}\right)_{K=\overline{K}} = 0, \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i\left(F_i - \overline{K}\varepsilon_i\right) = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i F_i - \overline{K}\sum_{i=1}^{5} {\varepsilon_i}^2 = 0 \ ,$$

$$\overline{K} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i F_i}{\sum_{i=1}^{5} {\varepsilon_i}^2} \ .$$

Luego es directamente calculable el valor más probable de la constante elástica, reemplazando los valores tabulados de las mediciones experimentales, entonces:

$$\overline{K} = \frac{1334}{80.9}\frac{gf}{cm} = 16.5\frac{gf}{cm} \ .$$

Resumen de las fórmulas de uso en la práctica.

Mediciones directas de la magnitud *X*:

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Valor medio:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Error medio cuadrático:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - X_i\right)^2}$$

Error del valor medio:

$$E = \pm\frac{m}{\sqrt{n-1}}$$

Resultado de la Medición:

$$X = \overline{X} \pm \frac{m}{\sqrt{n-1}}$$

Mediciones indirectas: $L = f_{(X,Y,Z,\ldots)}$.

En función de las mediciones directas,

$X_i, (i = 1,2,3,\ldots,n)$
$Y_i, (j = 1,2,3,\ldots,p)$
$Z_i, (k = 1,2,3,\ldots,q)$
....

Valor más probable:

$$\overline{L} = f_{(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\ldots)}$$

Error medio cuadrático:

$$m_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{X}}\right)^2 m_X{}^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \overline{Y}}\right)^2 m_Y{}^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \overline{Z}}\right)^2 m_z{}^2 + \ldots}$$

Error del valor más probable:

$$E_L = \pm\frac{m_L}{\sqrt{npq-1}}$$

Ponderación de observaciones.

$X_i', (i = 1,2,3,\ldots,n)$, de valor medio $\overline{X}'$ y peso *a*.
$X_i'', (i = 1,2,3,\ldots,p)$, de valor medio $\overline{X}''$ y peso *b*.
$X_i''', (i = 1,2,3,\ldots,q)$, de valor medio $\overline{X}'''$ y peso *c*.

Valor medio ponderado:

$$\overline{X}_p = \frac{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 \overline{X}' + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 \overline{X}'' + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2 \overline{X}'''}{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}$$

con,

$$E' = \pm \frac{m'}{\sqrt{n-1}}$$
$$E'' = \pm \frac{m''}{\sqrt{p-1}}$$
$$E''' = \pm \frac{m'''}{\sqrt{q-1}}$$

Error del valor medio ponderado:

$$E_p = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}}$$

Bibliografía.

Las referencias citadas a continuación se encuentran en la Biblioteca de la Regional Venado Tuerto.

1. Mediciones físicas, J. A. Balseiro. Apunte (1954).

2. Introducción a las mediciones de laboratorio, A. P. Maiztegui, R. J. Gleiser. Kapeluz (1980).

3. Física Volumen 1, R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane. CECSA (1993).

4. Cálculo diferencial e integral Tomo 1, N. Piskunov. MIR (1977).